# 第 5 节 原函数构造（★★★）

## 强化训练

1．（2023・陕西西安模拟・★★）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=3$，且 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 恒有 $f'(x)<2(x\in\mathbf{R})$，则不等式 $f(x)<2x+1$ 的解集为（　　）

（A）$(1,+\infty)$　（B）$(-\infty,-1)$　（C）$(-1,1)$　（D）$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

**答案：** A

**解析：** 所给的含 $f'(x)$ 的不等式的各部分都容易看出原函数，直接移项构造即可，

因为 $f'(x)<2$，所以 $f'(x)-2<0$，设 $g(x)=f(x)-2x$，则 $g'(x)=f'(x)-2<0$，所以 $g(x)$ 在 **R** 上↘，给了 $f(1)$，我们算一下 $g(1)$，看能否与要解的不等式联系起来，又 $f(1)=3$，所以 $g(1)=f(1)-2=1$，

故 $f(x)<2x+1$ 即为 $f(x)-2x<1$，也即 $g(x)<g(1)$，结合 $g(x)$ 在 **R** 上↘可得 $x>1$.

2．（2023・湖北模拟・★★）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，若 $f(x)+xf'(x)>0$，则不等式 $(x+2)f(x+2)>x^2f(x^2)$ 的解集是（　　）

（A）$(-2,1)$　（B）$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　（C）$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　（D）$(-1,2)$



**答案：** D

**解析：** 看到 $xf'(x)+f(x)$，想到构造 $xf(x)$，

设 $g(x)=xf(x)$，则由题意，$g'(x)=f(x)+xf'(x)>0$，

所以 $g(x)$ 在 **R** 上↗，又 $(x+2)f(x+2)>x^2f(x^2)$ 即为 $g(x+2)>g(x^2)$，所以 $x+2>x^2$，解得：$-1<x<2$.

3．（2022・湖南怀化模拟・★★★）已知定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，当 $x>0$ 时，$f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}<0$，若 $a=2f(1)$，$b=f(2)$，$c=4f(\dfrac{1}{2})$，则 $a$，$b$，$c$ 的大小关系为（　　）

（A）$c<b<a$　（B）$c<a<b$　（C）$a<b<c$　（D）$b<a<c$

**答案：** D

**解析：** 因为当 $x>0$ 时，$f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}<0$，所以 $\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x}<0$，结合 $x>0$ 可得 $xf'(x)-f(x)<0$，

看到 $xf'(x)-f(x)$，想到构造 $\dfrac{f(x)}{x}$，设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上↘，要比较的 $a$，$b$，$c$ 涉及 $f(1)$，$f(2)$，$f(\dfrac{1}{2})$，故先看看 $g(1)$，$g(2)$，$g(\dfrac{1}{2})$ 的大小，

因为 $0<\dfrac{1}{2}<1<2$，所以 $g(\dfrac{1}{2})>g(1)>g(2)$，故 $\dfrac{f(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}}>\dfrac{f(1)}{1}>\dfrac{f(2)}{2}$，

各项同乘以 2 可得 $4f(\frac{1}{2})>2f(1)>f(2)$，即 $c>a>b$，也即 $b<a<c$.

4.（2023 •贵州模拟 •★★★）已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，$f(2)=1$，且对任意的 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)+f(x)>0$，则不等式 $f(x)<\mathrm{e}^{2-x}$ 的解集为_____.

答案：$(-\infty,2)$

解析：条件中有 $f'(x)+f(x)$，$\mathrm{e}^x f(x)$ 求导后会产生这一结构，构造的思路就有了，

设 $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x f(x)+\mathrm{e}^x f'(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)+f(x)]>0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↗，

故 $f(x)<\mathrm{e}^{2-x}\Leftrightarrow \mathrm{e}^x f(x)<\mathrm{e}^2\Leftrightarrow g(x)<\mathrm{e}^2$ ①，

需将右侧的 $\mathrm{e}^2$ 也化为 $g(x)$ 在某处的函数值，才能用单调性，条件中有 $f(2)$，故计算 $g(2)$，

因为 $f(2)=1$，所以 $g(2)=\mathrm{e}^2 f(2)=\mathrm{e}^2$，从而不等式①即为 $g(x)<g(2)$，故 $x<2$.

5.（2023 • 四省联考 • ★★★）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数存在，且 $f'(x)<g'(x)$，则当 $x\in(a,b)$ 时，有（　　）

（A）$f(x)<g(x)$　（B）$f(x)>g(x)$　（C）$f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$　（D）$f(x)+g(b)<g(x)+f(b)$

答案：C

解析：$f'(x)<g'(x)$ 的左右两侧的原函数都容易看出来，故直接移项即可构造原函数，

因为 $f'(x)<g'(x)$，所以 $f'(x)-g'(x)<0$，设 $F(x)=f(x)-g(x)$，则 $F'(x)=f'(x)-g'(x)<0$，

所以 $F(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上↘，从而当 $x\in(a,b)$ 时，$a<x<b$，故 $F(a)>F(x)>F(b)$，



即 $f(a)-g(a)>f(x)-g(x)>f(b)-g(b)$，由 $f(a)-g(a)>f(x)-g(x)$ 可得 $f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$，故选 C.